

**Physique
Générale :
Mécanique**

**02.02: Rappels
mathématiques:
Dérivées**

**Sections
SC, GC & SIE , BA1**

Dr. J.-P. Hogge

**Swiss Plasma
Center**

**École polytechnique
fédérale de
Lausanne**

Version du 10.9.2024

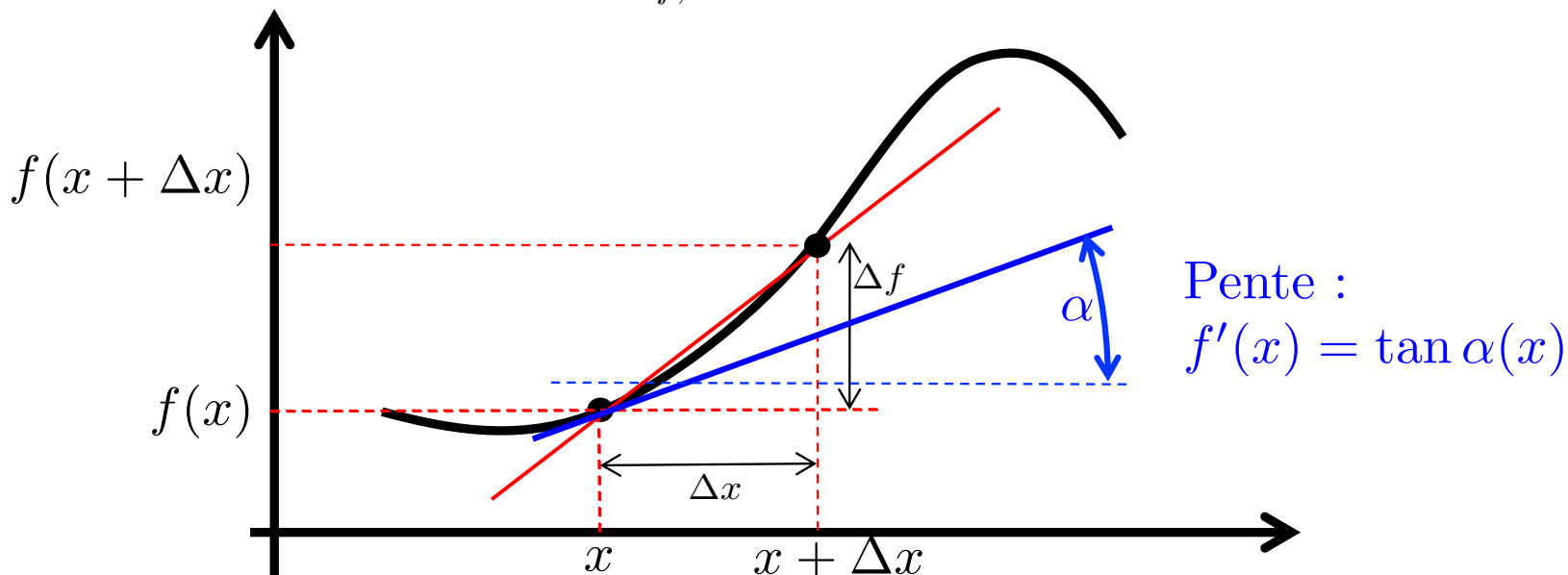
Quelques rappels sur les dérivées:

- Dérivée d'une fonction $f(x)$
- Dérivée d'une somme et d'un produit de fonctions
- Dérivée d'une fonction composée (chain rule)
- Dérivée d'une fonction vectorielle
- Développement limité d'une fonction $f(x)$ autour d'un point $x=x_0$
- Primitive

La dérivée $f'(x)$ d'une fonction f par rapport à sa variable x correspond au taux de variation de f lorsque x varie, ou en d'autres termes, à la pente de f évaluée au point x

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$\Delta f, \Delta x$: accroissements (pas forcément petits)
 df, dx : éléments infinitésimaux

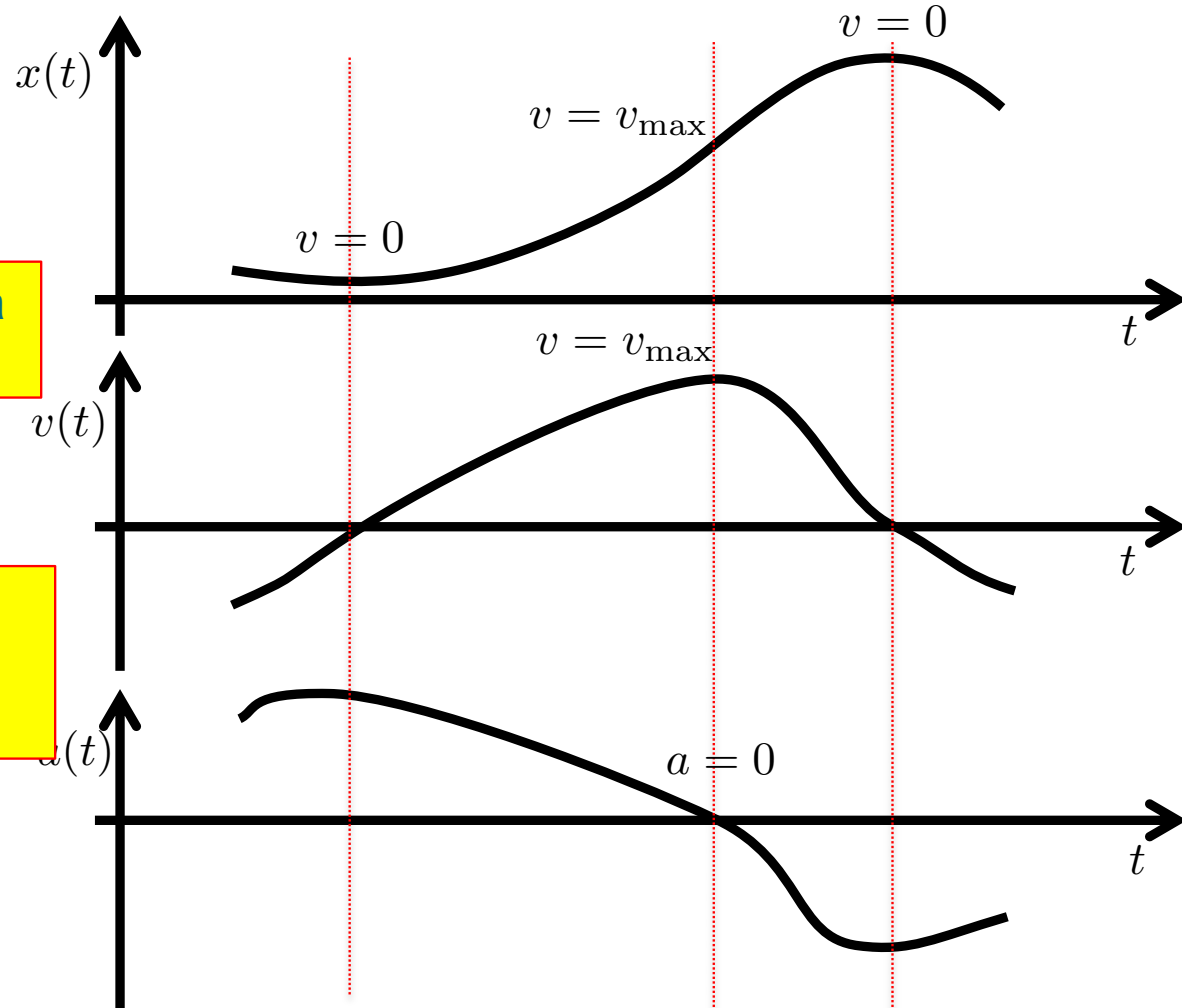


La vitesse est la dérivée de la position

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

L'accélération est la dérivée de la vitesse, soit la dérivée seconde de la position

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$



$$f(x) = x^n, \quad (x^n)' = ?$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \underbrace{\dots x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots x^{n-3}(\Delta x)^3 + \dots + (\Delta x)^n}_{\text{termes très petits}}$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n \simeq x^n + nx^{n-1}\Delta x$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n \simeq nx^{n-1}\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \simeq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = nx^{n-1}$$

$$\mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

‘Terme d’ordre $(\Delta x)^2$ ’

Dépend du carré de Δx , et est donc **négligeable** devant Δx si Δx est très petit

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

En
particulier:

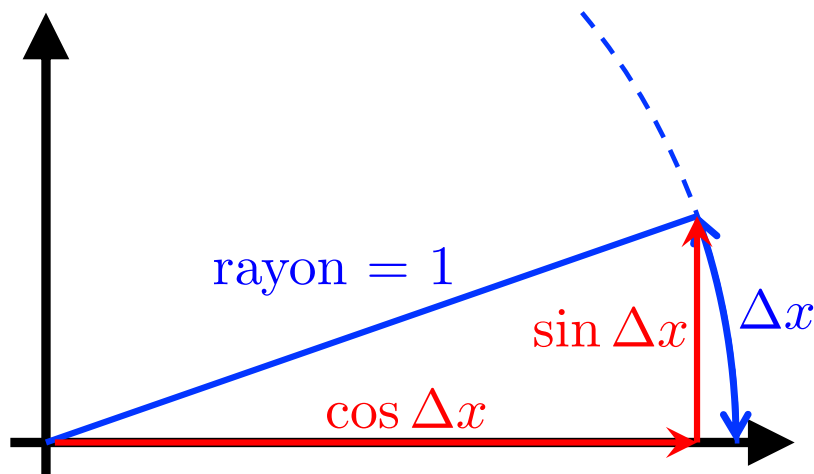
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x \quad , \quad (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$\sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right)$$

Par inspection du cercle trigonométrique:



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} \right) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) = 1$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Dérivée d'une somme de fonctions

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - \cancel{f(x)g(x + \Delta x)} + \cancel{f(x)g(x + \Delta x)} - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) g(x + \Delta x) + f(x) \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Dérivée d'un produit de fonctions

Fonction composée: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Exemple: $\cos(2x^2) \implies f(g) = \cos(g) \quad , \quad g(x) = 2x^2$

Composition de trois fonctions:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

$$\frac{1}{\log(4x^2 + x + 1)} \implies f(g) = \frac{1}{g} \quad , \quad g(h) = \log(h) \quad , \quad h(x) = 4x^2 + x + 1$$

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

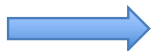
On utilise, si Δz très petit:

$$h'(z) = \frac{dh}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(z + \Delta z) - h(z)}{\Delta z} \implies h(z + \Delta z) \simeq h(z) + \frac{dh}{dz} \Delta z = h(z) + \Delta h \quad \begin{array}{l} h \leftrightarrow f, g \\ z \leftrightarrow g, x \end{array}$$

en identifiant $h \leftrightarrow g, z \leftrightarrow x$ $g(x + \Delta x) = g(x) + \frac{dg}{dx} \Delta x = g(x) + \Delta g$

$h \leftrightarrow f, z \leftrightarrow g$ $f(g(x + \Delta x)) = f(g + \Delta g) = f(g) + \frac{df}{dg} \Delta g$

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g) + \frac{df}{dg} \Delta g - f(g)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df}{dg} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$



$$f(g(x))' = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$$

$$\frac{df}{dg} = -\frac{1}{g^2} \quad , \quad \frac{dg}{dx} = g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Applications directes:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(kx)$$

$$f(g) = \sin g \quad , \quad \frac{df}{dg} = \cos g \quad , \quad g(x) = kx \quad , \quad \frac{dg}{dx} = k$$

$$\sin(kx)' = k \cos(kx)$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^m}$	$-\frac{m}{x^{m+1}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

- Soit $\vec{u}$ un vecteur de composantes $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ où t est un paramètre.

$$\vec{u}'(t) = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_1(t)}{dt} \\ \frac{du_2(t)}{dt} \\ \frac{du_3(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

- On montre facilement:

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v})' = \vec{u}' \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}'$$

Définition: Développement limité au premier ordre

- Connaissant la valeur que prend une fonction f en un point x_0 , on peut **approximer** la fonction $f(x)$ pour des valeurs de x **proches** de x_0 par un développement limité au premier ordre:

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2)$$

↑
f approximée
au point x

↑
f évaluée
au point x_0

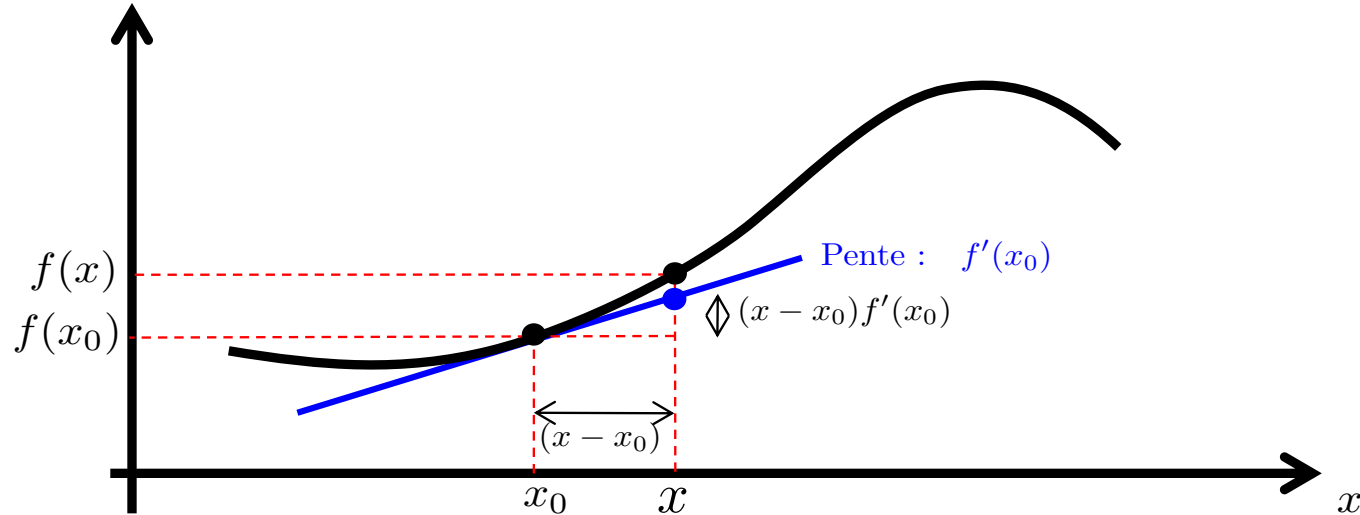
↑
terme d'ordre
1 linéaire en
(x-x₀)

↑
dérivée de f
évaluée
au point x_0

↑
Termes d'ordre 2 (en (x-
 x_0)²)
Note: $(x-x_0)^2 \ll (x-x_0)$

- Plus généralement:
$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2)$$



$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2)$$

$$x \text{ très petit} \left\{ \begin{array}{l} \sin x \simeq 0 + x \underbrace{\cos 0}_1 \simeq x \\ \cos x \simeq \underbrace{\cos 0}_1 + x \underbrace{\sin 0}_0 \simeq 1 \end{array} \right.$$

Définition: Primitive

La primitive d'une fonction $f(x)$ est (si elle existe) une fonction $F(x)$ telle que:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

La primitive d'une fonction est très utile lors d'opérations d'intégration.

■ Dérivée d'une fonction:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df}{dx}$$

■ Approximation de la fonction $f(x)$ au voisinage du point x_0 par un développement limité d'ordre 1:

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2)$$

■ Règles utiles:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

■ Règles utiles (suite):

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

■ Dérivées partielles:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

■ Primitive:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \implies \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Définition: Dérivée partielle

La dérivée partielle d'une fonction par rapport à l'un des ses (>1) arguments s'obtient comme dans le cas d'une fonction à une seule variable, en considérant que les autres sont constantes

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

La dérivée partielle d'un fonction représente la taux de variation de la fonction par rapport à une variable lorsque l'autre est fixe.

Exemple: $f(x,y)$ = altitude (longitude latitude)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \text{variation d'altitude si on se déplace à l'est}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \text{variation d'altitude si on se déplace au nord}$$

